Principi di Inferenza

Esercitazione: variabili aleatorie

1 Variabili aleatorie discrete

Esercizio 1. Si lanciano due dadi equilibrati e sia X il *massimo* dei due risultati.

a) Determinare il supporto e la distribuzione di probabilità di X.

b) Calcolare $F_X(3)$ e $\mathrm{P}(X \geq 5)$.

c) Calcolare $\mathrm{E}[X]$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria discreta con supporto $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathrm{P}(X = k) = c\,k$ per $k = 1, 2, 3, 4$.

a) Determinare c.

b) Calcolare $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}(X)$.

c) Scrivere la funzione di ripartizione F_X e calcolare $F_X(2.5)$.

Esercizio 3. Una variabile aleatoria X ha funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

a) Determinare il supporto e la distribuzione di probabilità di X.

b) Calcolare $\mathrm{P}(X > 0.5)$, $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3)$ e $\mathrm{P}(X < 3)$.

c) Calcolare $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}(X)$.

2 Variabili aleatorie continue

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f_X(x) = c\,x^2$ per $0 \le x \le 3$, e $f_X(x) = 0$ altrimenti.

a) Determinare c.

b) Calcolare $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$ e $\mathrm{P}(X = 1.5)$.

c) Determinare la funzione di ripartizione F_X.

d) Calcolare $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}(X)$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/4 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

a) Determinare la densità f_X.

b) Calcolare $\mathrm{P}(X > 1.5)$.

c) Determinare la mediana di X, cioè il valore m tale che $F_X(m) = 1/2$.

d) Calcolare $\mathrm{E}[X]$.

3 Distribuzioni congiunte e indipendenza

Esercizio 6. Le variabili $X \in \{0, 1, 2\}$ e $Y \in \{0, 1\}$ hanno distribuzione congiunta

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0.10	0.20
$X = 1$	0.15	0.25
$X = 2$	0.20	0.10

a) Calcolare le distribuzioni marginali di X e Y.

b) X e Y sono indipendenti?

c) Calcolare $\mathrm{cov}(X, Y)$ e $\mathrm{corr}(X, Y)$.

Esercizio 7. Siano $X \sim \text{Bernoulli}(0.3)$ e $Y \sim \text{Bernoulli}(0.6)$ indipendenti.

a) Scrivere la tabella della distribuzione congiunta di (X, Y).

b) Calcolare $\mathrm{P}(X + Y = 1)$.

c) Calcolare $\mathrm{E}[XY]$ e $\mathrm{var}(X + Y)$.

Esercizio 8. Siano X, Y con densità congiunta $f_{X,Y}(x,y) = x + y$ per $(x,y) \in [0,1]^2$, e 0 altrimenti.

a) Verificare che $f_{X,Y}$ è una densità congiunta e calcolare le densità marginali.

b) X e Y sono indipendenti?

c) Calcolare $\text{cov}(X,Y)$.

Esercizio 9. Il tempo di attesa X (in minuti) di un autobus è $X \sim \text{Unif}(0,10)$; il tempo di attesa Y (in minuti) di un taxi è $Y \sim \text{Exp}(1/2)$. Le due variabili sono indipendenti.

a) Scrivere la densità congiunta di (X,Y).

b) Calcolare $\text{P}(X < 3,\ Y > 2)$.

c) Calcolare $\text{E}[XY]$ e $\text{cov}(X,Y)$.

Esercizio 10. Sia X uniforme discreta su $\{-2,-1,0,1,2\}$ e sia $Y = |X|$.

a) Calcolare $\text{cov}(X,Y)$.

b) X e Y sono indipendenti? Commentare.

4 Valore atteso, varianza, covarianza

Esercizio 11. Un bar vende ogni giorno un numero X di gelati, con $\text{E}[X] = 80$ e $\text{var}(X) = 100$. Ogni gelato porta un ricavo di 2.5 euro, e ci sono 40 euro di costi fissi giornalieri. Sia $Y = 2.5X - 40$ il guadagno giornaliero.

a) Calcolare $\text{E}[Y]$, $\text{var}(Y)$ e la deviazione standard di Y.

b) Supponendo che le vendite di due giorni diversi, X_1 e X_2, siano indipendenti e con la stessa distribuzione di X, calcolare valore atteso e varianza del guadagno totale $Y_1 + Y_2$.

Esercizio 12. Siano X e Y due variabili con $\text{var}(X) = 4$, $\text{var}(Y) = 9$ e $\text{cov}(X,Y) = 3$. Calcolare

a) $\text{corr}(X,Y)$;

b) $\text{var}(X+Y)$ e $\text{var}(X-Y)$;

c) $\text{var}(2X - 3Y + 1)$.

Esercizio 13. I rendimenti annui (in %) di due titoli A e B hanno $\text{E}[A] = 5$, $\text{E}[B] = 8$, $\text{sd}(A) = 4$, $\text{sd}(B) = 10$ e correlazione $\text{corr}(A,B) = 0.3$. Un investitore ripartisce il capitale per il 60% in A e il 40% in B, ottenendo il rendimento $R = 0.6A + 0.4B$.

a) Calcolare $\text{E}[R]$ e $\text{var}(R)$.

b) Cosa cambierebbe se A e B fossero indipendenti?

Esercizio 14. Siano X e Y due variabili aleatorie con $\mathrm{sd}(X) = \sigma_X = 2$, $\mathrm{sd}(Y) = \sigma_Y = 5$ e $\mathrm{corr}(X, Y) = -0.4$. Definiamo $U = 3X + 1$ e $V = -2Y + 4$. Calcolare

a) $\mathrm{cov}(X, Y)$;

b) $\mathrm{cov}(U, V)$, $\mathrm{var}(U)$, $\mathrm{var}(V)$ e $\mathrm{corr}(U, V)$.

5 Distribuzioni discrete

Esercizio 15. Uno studente risponde *a caso* a un test di 12 domande a risposta multipla, ciascuna con 4 opzioni di cui una sola corretta. Sia X il numero di risposte corrette.

a) Qual è la distribuzione di X? Calcolare $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}(X)$.

b) Calcolare $\mathrm{P}(X = 3)$.

c) Calcolare la probabilità di indovinare almeno una risposta.

d) Calcolare la probabilità di rispondere correttamente ad almeno 11 domande.

Esercizio 16. Un giocatore tira a canestro con probabilità di successo $p = 0.3$ a ogni tiro, in modo indipendente. Sia X il numero di tiri necessari per realizzare il primo canestro.

a) Qual è la distribuzione di X? Calcolare $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}(X)$.

b) Calcolare $\mathrm{P}(X = 4)$.

c) Calcolare $\mathrm{P}(X \leq 3)$ e $\mathrm{P}(X > 5)$.

Esercizio 17. Un centralino riceve in media $\lambda = 6$ chiamate all'ora, in modo indipendente e con tasso costante. Sia X il numero di chiamate in un'ora.

a) Calcolare $\mathrm{P}(X = 0)$ e $\mathrm{P}(X = 4)$.

b) Calcolare $\mathrm{P}(X \leq 2)$.

c) Sia W il numero di chiamate in mezz'ora. Qual è la distribuzione di W? Calcolare la probabilità di ricevere almeno una chiamata in mezz'ora.

Esercizio 18. Un ufficio ha due sportelli. Il numero di clienti in un'ora allo sportello 1 è $X_1 \sim \mathrm{Poisson}(3)$, allo sportello 2 è $X_2 \sim \mathrm{Poisson}(5)$, e i due numeri sono indipendenti.

a) Qual è la distribuzione del numero totale di clienti $Y = X_1 + X_2$? Calcolare $\mathrm{E}[Y]$ e $\mathrm{var}(Y)$.

b) Calcolare $\mathrm{P}(Y = 8)$ e $\mathrm{P}(Y \leq 1)$.

c) Calcolare $\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$.

6 Distribuzioni continue

Esercizio 19. Il tempo X (in minuti) di consegna di un ordine è uniforme tra 20 e 50 minuti: $X \sim \text{Unif}(20, 50)$.

a) Calcolare $\text{E}[X]$, $\text{var}(X)$ e la deviazione standard.

b) Calcolare $\text{P}(X > 40)$ e $\text{P}(25 < X < 35)$.

c) Determinare il tempo t entro cui viene consegnato il 90% degli ordini.

Esercizio 20. Sia $X \sim N(50, 16)$. Calcolare

a) $\text{P}(X < 54)$;

b) $\text{P}(X > 45)$;

c) $\text{P}(46 < X < 58)$;

d) $\text{P}(|X - 50| < 6)$.

Esercizio 21. Il punteggio X in un test attitudinale segue $X \sim N(100, 15^2)$.

a) Quale punteggio bisogna superare per rientrare nel 10% dei punteggi più alti?

b) Qual è il punteggio sotto il quale cade il 5% dei candidati?

c) Determinare l'intervallo simmetrico attorno alla media che contiene il 95% dei punteggi.

Esercizio 22. Il tempo di percorrenza (in minuti) di un tragitto in due tratte è dato da $T_1 \sim N(30, 16)$ per la prima tratta e $T_2 \sim N(20, 9)$ per la seconda, con T_1 e T_2 indipendenti. Sia $T = T_1 + T_2$.

a) Determinare la distribuzione di T.

b) Calcolare $\text{P}(T > 60)$ e $\text{P}(T < 45)$.

c) Se si parte 55 minuti prima dell'appuntamento, qual è la probabilità di arrivare in tempo?

d) Calcolare $\text{P}(T_1 > T_2)$.

Esercizio 23. Il tempo (in ore) tra due guasti consecutivi di una macchina è $X \sim \text{Exp}(0.5)$.

a) Calcolare $\text{E}[X]$ e $\text{var}(X)$.

b) Calcolare $\text{P}(X > 3)$ e $\text{P}(1 < X < 4)$.

c) Sapendo che la macchina funziona già da 2 ore senza guasti, qual è la probabilità che funzioni per almeno altre 3 ore?

d) Determinare la mediana di X.

Esercizio 24. Un sistema ha tre componenti di riserva usate una dopo l'altra. Le durate X_1, X_2, X_3 (in anni) sono indipendenti, ciascuna Exp(2). Sia $X = X_1 + X_2 + X_3$ la durata totale.

a) Qual è la distribuzione di X? Scriverne la densità.

b) Calcolare $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}(X)$, sia con la formula della Gamma sia sommando le singole esponenziali.

Esercizio 25. Siano Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 variabili aleatorie indipendenti, ciascuna $N(0,1)$.

a) Sia $V = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$. Qual è la sua distribuzione? Calcolare $\mathrm{E}[V]$ e $\mathrm{var}(V)$.

b) Sia $T = \dfrac{Z_4}{\sqrt{V/3}}$. Qual è la distribuzione di T? Calcolare $\mathrm{E}[T]$ e $\mathrm{var}(T)$.

c) Calcolare la varianza di una variabile t_{10} e confrontarla con quella di una $N(0,1)$.

7 Media campionaria, legge dei grandi numeri e TLC

Esercizio 26. Siano $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $\mathrm{E}[X_i] = 50$ e $\mathrm{var}(X_i) = 64$.

a) Calcolare valore atteso, varianza e deviazione standard di $\bar{X}_n$ per $n = 16$.

b) Se le X_i sono normali, calcolare $\mathrm{P}(\bar{X}_{16} > 53)$ e $\mathrm{P}(\bar{X}_{64} > 53)$.

c) Quanto deve valere (almeno) n affinché la deviazione standard della media campionaria sia al più 0.5?

Esercizio 27. Il tempo di servizio (in minuti) di un cliente in un negozio è una variabile $X \sim \mathrm{Exp}(0.2)$, e i tempi dei diversi clienti sono indipendenti. Si osservano $n = 100$ clienti.

a) Calcolare $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{sd}(X)$.

b) Usando il TLC, calcolare la probabilità che il tempo totale di servizio $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ superi 550 minuti.

c) Usando il TLC, calcolare $\mathrm{P}(4.5 < \bar{X}_{100} < 5.5)$.

Esercizio 28. In una popolazione la proporzione di persone favorevoli a un provvedimento è $p = 0.4$. Si intervistano $n = 400$ persone scelte in modo indipendente. Sia $X_i = 1$ se la i-esima persona è favorevole e 0 altrimenti, e $\bar{X}_n$ la proporzione campionaria di favorevoli.

a) Determinare $\mathrm{E}[\bar{X}_n]$ e $\mathrm{sd}(\bar{X}_n)$.

b) Usando il TLC, calcolare $\mathrm{P}(\bar{X}_n > 0.45)$.

c) Usando il TLC, calcolare $\mathrm{P}(0.37 < \bar{X}_n < 0.43)$.

Valori utili

Per gli esercizi sulla normale si possono usare i seguenti valori della funzione di ripartizione $\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z)$ della normale standard, insieme alla simmetria $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$:

z	1	1.22	1.25	1.5	1.96	2	2.04	3
$\Phi(z)$	0.8413	0.8888	0.8944	0.9332	0.9750	0.9772	0.9793	0.9987

Quantili: $z_{0.90} = 1.28, \quad z_{0.95} = 1.645, \quad z_{0.975} = 1.96.$