Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria discreta con supporto $\{1,2,3,4\}$ e $\mathrm{P}(X=k)=c\,k$ per $k=1,2,3,4$.

a) Determinare c.

b) Calcolare $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}(X)$.

c) Scrivere la funzione di ripartizione F_X e calcolare $F_X(2.5)$.

$\mathbb{P}(X=1)=c\cdot 1$ $\quad$ $\mathbb{P}(X=2)=c\cdot 2$

$\mathbb{P}(X=3)=c\cdot 3$ $\quad$ $\mathbb{P}(X=4)=c\cdot 4$

a) deve valere $\sum_{k=1}^{4}\mathbb{P}(X=k)=1$

$$\sum_{k=1}^{4} ck = 1 \quad\Rightarrow\quad c\sum_{k=1}^{4}k = c\,(1+2+3+4) = c\cdot 10 = 1$$

$$\Leftrightarrow\ c=\frac{1}{10}$$

b) $\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{4}k\,\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{4}k\cdot\frac{k}{10}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{4}k^2$

$$=\frac{1}{10}(1+4+9+16)=\frac{30}{10}=3$$

$$\mathrm{var}(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathbb{E}[X^2]=\sum_{k=1}^{4}k^2\,\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{4}k^2\cdot\frac{k}{10}=\sum_{k=1}^{4}\frac{k^3}{10}=$$

$$=\frac{1}{10}(1+8+27+64)=\frac{100}{10}=10$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}(X)=10-3^2=1$$

c) $F_X(x)=\mathbb{P}(X\le x)$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1/10 & 1\le x<2\\ 3/10 & 2\le x<3\\ 6/10 & 3\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

c $F_X(2.5)=\mathbb{P}(X\le 2.5)=\mathbb{P}(X=1,\,X=2)=3/10$



