**Esercizio 8.** Qual è il più preciso tra i seguenti stimatori di $\mu$?

(a) La media campionaria di un campione di numerosità $n$ tratto da una popolazione con media $\mu$ e varianza $\sigma^2$.

(b) La media campionaria di un campione di numerosità $3n$ tratto da una popolazione con media $\mu$ e varianza $2\sigma^2$.

Sappiamo che entrambi gli stimatori sono corretti, infatti

$$\mathbb{E}[\bar{X}_a] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$\mathbb{E}[\bar{X}_b] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3n} X_i \cdot \frac{1}{3n}\right] = \frac{1}{3n}\,\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3n} X_i\right] = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{3n}\mu = \frac{3n\mu}{3n} = \mu$$

La precisione invece è legata alla varianza:

$$\mathrm{var}(\bar{X}_a) = \mathrm{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{ind.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mathrm{var}(\bar{X}_b) = \mathrm{var}\left(\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{3n} X_i\right) = \frac{1}{9n^2}\,\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{3n} X_i\right) \overset{\text{ind.}}{=} \frac{1}{9n^2}\sum_{i=1}^{3n}\mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{\cancel{9}\,3n^{\cancel{2}}}\cdot \cancel{3}n \cdot 2\sigma^2 = \frac{2}{3n}\sigma^2$$

quindi $\mathrm{var}(\bar{X}_b) < \mathrm{var}(\bar{X}_a)$ $\Rightarrow$ $\bar{X}_b$ è più preciso